Université Abdelmalek Essaadi
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Al Hoceima

Cours Analyse II

Chapitre 4

Séries Entières

ENSAH
2018-2019

Enseignant : Y. Abouelhanoune

Table des matières

Séries Entières

1 Définition générale

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ va désigner le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Définition

On appelle série entière toute série de fonctions dont le terme général s'écrit :

$$U_n(x) = a_n x^n \text{ avec } (a_n, x) \in \mathbb{C}^2$$

1.2 Lemme d'Abel

Supposons qu'il existe un $x_0 \in \mathbb{K}$ tel que la suite $(a_n x_0^n)$ soit bornée. Alors $\forall x \in \mathbb{K}$ tel que $|x| < |x_0|$, la série $\sum a_n x^n$ converge absolument.

Preuve

La suite $(a_n x_0^n)$ est bornée alors $\exists M > 0;\ \forall n \in \mathbb{N};\ |a_n x_0^n| \leq M$. On a :

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

Or la série géométrique $\sum \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ converge (car $|x| < |x_0|$) d'après le théorème de comparaison la série $\sum |a_n x^n|$ converge. C'est à dire $\sum a_n x^n$ converge absolument.

1.3 Rayon de convergence

Du théorème précédent, on peut déduire le théorème suivant (à admettre) :

Théorème

Il existe un et un seul réel positif R (éventuellement nul ou infini) tel que l'on ait :

1. La série $\sum a_n x^n$ converge absolument pour tout x tel que $x < |R|$.
2. $\sum a_n x^n$ diverge pour tout x tel que $|x| > R$.

Le réel R est appelé rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

Remarques

1. Si $R > 0$, l'ensemble $D_R = \{x \in \mathbb{K} \ / \ |x| < R\}$ est appelé disque de convergence.
2. Si $\forall x \in \mathbb{K};\ \sum a_n x^n$ converge absolument alors $R = +\infty$.
   Si $\forall x \in \mathbb{K};\ \sum a_n x^n$ diverge alors $R = 0$.

Techniques de calcul de R

Pour calculer la rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n x^n$, on se sert habituellement des critères de Cauchy ou de d'Alembert pour les séries associées.

Exemple

1. Rayon de convergence de la série complexe $\sum U_n(z)$ avec $U_n(z) = \frac{z^n}{n^\alpha}$.
   Utilisons le critère de d'Alembert pour la série $\sum |U_n(z)|$.
   $$\frac{|U_{n+1}(z)|}{|U_n(z)|} = \left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \cdot \frac{n^\alpha}{z^n}\right| = |z| \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha$$
   $$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{U_{n+1}(z)}{U_n z}\right| = |z|$$
   On en déduit que $\begin{array}{l} \text{Si } |z| < 1 \text{ alors } \sum |U_n(z)| \text{ converge.} \\ \text{Si } |z| > 1 \text{ alors } \sum |U_n(z)| \text{ diverge.} \end{array}$ Donc $R = 1$.
2. $\sum \frac{z^n}{n^{3n}}$. On a : $U_n(z) = \frac{z^n}{n^{3n}}$.
   Appliquons le critère de Cauchy à $\sum |U_n(z)|$:
   $$\sqrt[n]{|U_n(z)|} = \left|\frac{z^n}{n^{3n}}\right|^{\frac{1}{n}} = \frac{|z|}{n^3}$$
   $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|U_n(z)|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|z|}{n^3} = 0 < 1$$
   D'après le critère de Cauchy $\sum |U_n(z)|$ converge $\forall z \in \mathbb{C}$. Donc $R = +\infty$.

2 Addition et multiplication de séries entières

2.1 Théorème 1

Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_1 et R_2. Alors la série entière $\sum (a_n + b_n)x^n$ a un rayon de convergence R tel que $R \geq \inf(R_1, R_2)$.
De plus $R = \inf(R_1, R_2)$ si $R_1 \neq R_2$.
Et on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \quad \forall x \ / \ |x| < R$$

2.2 Théorème 2

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_1 et R_2. Alors la série entière produit $\sum c_n x^n$ définie par :
$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$
a un rayon de convergence R tel que $R \geq \inf(R_1, R_2)$. Et on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) \quad \forall x \ / \ |x| < \inf(R_1, R_2)$$

3 Séries dérivées et séries primitives

Nous allons, sans le démontrer, donner quelques théorèmes relatifs aux séries dérivées et séries primitives d'une série entière.

3.1 Théorème 1

Une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R converge uniformément sur tout compact de la forme :

$$D_\varphi = \{x \in \mathbb{K} \ / \ |x| \leq \varphi\} \quad \text{avec } \varphi < R$$

Du théorème 1, on peut déduire les théorèmes suivants :

3.2 Théorème 2

La somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ d'une série entière est continue sur le disque de convergence $D_R = \{x \in \mathbb{K} \ / \ |x| < R\}$.

3.3 Théorème 3 (intégration)

On peut intégrer terme à terme une série entière réelle sur son intervalle de convergence. C'est à dire :

$$\forall x \in]-R, R[; \quad \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n t^n) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (a_n t^n) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

De plus la série obtenue par intégration a le même rayon de convergence que la série $\sum a_n x^n$.

3.4 Théorème 4 (Dérivation)

On peut dériver terme à terme une série entière réelle sur son intervalle de convergence. C'est à dire :

$$\forall x \in]-R, R[; \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n x^n) \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

De plus la série obtenue par dérivation a le même rayon de convergence que la série $\sum a_n x^n$.

4 Développement d'une fonction en série entière

On considère ici des séries entières $\sum a_n x^n$ à termes réels c'est à dire les $a_n \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. Le problème qu'on se pose est le suivant :

Problème

Etant donné un itervalle $I \subset \mathbb{R}$ tel que $0 \in I$ et une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Existe-t-il une série entière $\sum a_n x^n$ telle que l'on ait : $\forall x \in I; \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$?
Dans ce cas on dira que f est développable en série entière sur I.

4.1 Recherche d'une condition nécessaire

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Supposons que f soit développable en série entière. C'est à dire $\forall x \in I; \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors $f(0) = a_0$.
En dérivant on aura : $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$. Donc $f'(0) = a_1$.
$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$. Donc $f''(0) = 2a_2$ c'est à dire $a_2 = \frac{f''(0)}{2}$.

$\vdots$
$f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)a_n x^{n-p}$. Donc $f^{(p)}(0) = p!a_p$ donc $a_p = \frac{f^{(p)}}{p!}$. On a alors :

$$\forall x \in I; \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

• Condition suffisante :
Considérons maintenant une série entière $\sum a_n x^n$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{avec} \quad f \in C^{\infty}(I, \mathbb{R})$$

$\forall x \in I;\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On fait un développement de Mac Laurin de f à l'ordre n.
Et on a :

$$\forall x \in I;\ \exists \theta \in]0,1[,\ \text{tq :} \quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Soit S_n la suites des sommes partielles de $\sum a_n x^n$. On a :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

On a :

$$\forall x \in I; \quad f(x) - S_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \text{ (Reste de Mac Laurin } r_n(x))$$

Supposons que $\forall x \in I;\ f(x) = \lim_{n \to +\infty} S_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Et on a le théorème suivant :

Théorème

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I$ et $f \in C^{\infty}(I, \mathbb{R})$. Pour que f soit développable en série entière sur I, il faut et il suffit que le reste de Mac Laurin de f tend vers 0; $\forall x \in I$.

Cas où les dérivées successives sont bornées

Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}\ \left(f^{(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

$$\exists M > 0;\ \forall n \in \mathbb{N};\ \forall x \in I; \ \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$$

Le reste de Mac Laurin $r_n(x)$ est tel que :

$$|r_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}\right| \leq M \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

Or la série $\sum M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ converge $\forall x \in I$ (appliquer d'Alembert).
Donc $\forall x \in I;\ \lim_{n \to +\infty} \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ (condition nécessaire de convergence d'une série). D'où $\lim_{n \to +\infty} r_n(x) = 0$.

Théorème

Soit $f \in C^{\infty}(I, \mathbb{R})$ avec $0 \in I$.
Pour que f soit développable en série entière sur I, il suffit que les dérivées successives de f soient bornées. C'est à dire :

$$\exists M > 0;\ \forall n \in \mathbb{N}; \forall x \in I; \quad \left| f^{(n)}(x) \right| \leq M$$

4.2 Applications aux fonctions élémentaires

Développement en série entière des fonctions Cosinus et Sinus

• La fonction $f(x) = \cos(x)$ est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Donc $|f^{(n)}(x)| \leq 1$. D'où la fonction cos est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}; \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n!} x^n$$

$$\begin{array}{ll} \text{Si } n = 2p; & \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \cos(p\pi) = (-1)^p \\ \text{Si } n = 2p+1; & \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{(2p+1)\pi}{2}\right) = 0 \end{array}$$

$$\boxed{\text{D'où } \cos(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p} + \ldots \quad (R = +\infty)}$$

$$\left(|W_p| = \left| \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p} \right| = \frac{|x|^{2p}}{(2p)!} \quad \text{donc} \quad \left| \frac{W_{p+1}}{W_p} \right| = \frac{|x|^2}{(2p+2)(2p+1)} \quad \text{donc} \quad R = +\infty \right)$$

• La fonction $f(x) = \sin(x)$ est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Donc $|f^{(n)}(x)| \leq 1$. D'où la fonction sin est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}; \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n!} x^n$$

On trouve :

$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1} + \ldots \quad (R = +\infty)}$$

Développement en série entière des fonctions e^x ; ch(x) ; sh(x)

• La fonction $f(x) = e^x$ est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$. De plus la fonction est bornée sur tout compact $[-a, a]$ de $\mathbb{R}$. Donc e^x est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Et on a :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^x)^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{et} \quad R = +\infty}$$

On a aussi en remplaçant x par $-x$:

$$\boxed{e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}}$$

• On a :

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} (1 + (-1)^n)$$

$$\boxed{\mathrm{ch}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} \qquad R = +\infty}$$

• On a :

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} (1 - (-1)^n)$$

$$\boxed{\mathrm{sh}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \qquad R = +\infty}$$

4.3 Application de l'intégration

On sait que la série entière $\sum t^n$ a un rayon de convergence 1.
Et on a $\forall t \ / \ |t| < 1; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$.

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \right) dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x t^n dt \right) = -\ln(1-x)$$

donc :

$$\boxed{\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots \qquad (R = 1)}$$

D'où :

$$\ln(1+x) = \ln(1-(-x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \qquad (R = 1)$$

Si on remplace x par 1 on aura : (c'est une limite)

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)}$$

Développement en série entière de arctan

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad R = 1$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt$$

$$\boxed{\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad R = 1}$$

On remplace x par 1 on aura :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Développement en série entière de $(1+x)^\alpha ;\ \alpha \in \mathbb{R}$

On a :

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (R=1)}$$

$\square$